**§ 2. Многочлены одной переменной**

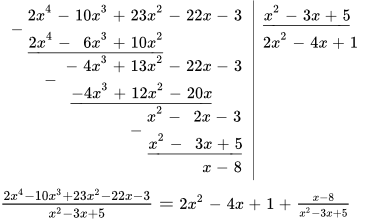
**Определение. *Многочленом*** (*целой рациональной функцией*) одной переменной  называется выражение вида

,

где  – действительные или комплексные числа, называемые *коэффициентами* многочлена,  – натуральное число или ноль.

*Степенью многочлена* называется наибольший из показателей степеней одночленов. Например:  – многочлены нулевой степени,  – многочлены первой степени,  – многочлены второй степени и т.д.

Если  и  – многочлены степени  и  соответственно, , то всегда найдутся однозначно определенные многочлены  степени  и  степени, меньшей чем , такие что . Для нахождения *частного*  и *остатка*  выполняют ***деление***  на  “уголком”. Например, разделим многочлен  на многочлен :



В результате деления получили частное  и остаток  Таким образом, многочлен  можно записать в виде:

.

Если , то многочлен  называется *делителем* .

Заметим, что деление многочленов очень часто используется для выделения целой части неправильной дроби, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены.

**Определение.** Число  (действительное или комплексное) называется ***корнем многочлена*** , если 

Например, многочлен  имеет два действительных корня: ; многочлен  имеет два действительных корня  и два комплексных корня .

**Теорема (Безу).** Остаток от деления многочлена  на двучлен  равен значению этого многочлена в точке , т.е. .

**Следствие.** Многочлен  делится на двучлен  без остатка, если  – корень , т.е. .

***Примеры.***

**1)** Найти остаток от деления многочлена  на двучлен .

*Решение*. ▲ По теореме Безу этот остаток равен значению многочлена в точке . Находим . Следовательно, искомый остаток равен 5. ▲

**2)** С помощью теоремы Безу доказать, что многочлен  делится на двучлен  без остатка.

*Решение*. ▲ Данный многочлен делится на двучлен  без остатка, если число  является корнем этого многочлена, т.е. . Проверяем:  – верно. Утверждение доказано. ▲

Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать дальше корни многочлена, степень которого уже на единицу меньше: если , то данный многочлен  будет выглядеть так: .

Таким образом, один корень найден и дальше находят уже корни многочлена , степень которого на единицу меньше степени начального многочлена. Иногда таким методом – называется понижением степени – находят все корни данного многочлена.

Вопрос о нахождении корня чаще всего решается подбором. При этом можно пользоваться следующим утверждением:

**Утверждение.**У многочлена со старшим коэффициентом, равным 1, целыми корнями могут быть только делители свободного члена.

***Пример.*** Возможными целыми корнями многочлена могут быть числа  – делители числа 4. Методом подбора можно установить, что  и, следовательно, 1 – корень многочлена.

**Теорема (Основная теорема алгебры).** Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

**Следствие 1.** Любой многочлен  степени  с комплексными коэффициентами  можно представить в виде произведения линейных множителей:

,

где  – корни многочлена кратности  соответственно (), причем . Другими словами, многочлен *n*-й степени с комплексными коэффициентами имеет ровно *n* корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

**Следствие 2.** Всякий многочлен  ​ степени  с действительными коэффициентами  представляется в виде произведения линейных множителей и квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами:





где  – различные действительные корни многочлена  кратности ​, причем .

***Пример.***Разложить на множители многочлен  .

*Решение*. ▲ Среди делителей числа 6 ищем корни многочлена. Убеждаемся, что 1 и 2 – корни. Тем самым многочлен делится на . Поделив, находим:

.

На множестве действительных чисел это – окончательное разложение, ибо дискриминант квадратного трехчлена отрицателен и, следовательно, он на множестве действительных чисел далее не разложим. Разложение того же многочлена на множестве комплексных чисел получим, если найдем комплексные корни квадратного трехчлена . Они равны . Тогда



– разложение данного многочлена на множестве комплексных чисел.